TD 41 : Fonctions de deux variables

Ouverts de $\mathbb{R}^2$

1 ★★ Les ensembles suivants sont-ils des ouverts de $\mathbb{R}^2$? Justifier.

1) $A = \mathbb{R}^2$
2) $B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
3) $C = [0,1]^2$
4) $D = [0,1[^2$
5) $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$
6) $F = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left(]k,k+1[^2\right)$

2 ★★ Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $U \cup V$ et $U \cap V$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.

Limite, continuité

3 ★☆ Étudier si les fonctions suivantes admettent une limite en $(0,0)$:

1) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
2) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$
3) ★ $f(x,y) = \dfrac{e^{xy}-1}{x}$

4 ★☆ On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2) Montrer que pour tous réels x et y, $|f(x,y)| \leq \dfrac{1}{2}\|(x,y)\|$. En déduire que f est continue en $(0,0)$.

Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, dérivée directionnelle

5 ★ On considère la fonction « norme » $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$N(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

1) Justifier que N est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2) Montrer que N n'admet pas de dérivées partielles en $(0,0)$.
3) Justifier que la restriction de N à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et déterminer ses dérivées partielles.

6 ★ Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ puis donner leur gradient en tout point $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$.

1) $f(x,y) = e^{xy} + xy + 1$
2) $g(x,y) = 3x^2 - \cos(y^2 - x)$
3) $h(x,y) = (1+x^2)^y$

7 ★☆ (*Primitive d'une dérivée partielle nulle*) Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. On veut montrer un résultat classique, à savoir :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv 0 \text{ ssi } \exists g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = g(y)$$

1) Traiter l'implication réciproque.
2) (a) Pour un $y_0 \in \mathbb{R}$ quelconque, On pose $F : x \mapsto f(x,y_0)$. Déterminer $F'(x_0)$ pour tout x_0 dans $\mathbb{R}$.
   (b) Conclure.
3) Que peut-on dire d'une fonction $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ telle que $\dfrac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$?

8 ★★ On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) On pose $v = (v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2$. Calculer la dérivée directionnelle de f selon v au point $(0,0)$.

2) Montrer que la fonction f n'est pas continue en $(0,0)$.

Règle de la chaine

9 ★☆ Soit $\varphi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_+^*)$. Montrer que $\psi : (x,y) \mapsto \sqrt{\varphi(x,y)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles en fonction de celles de φ.

10 ★☆ Soit $\varphi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Montrer que $\psi : t \mapsto \varphi(t^2, t^3)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de φ.

11 ★☆ Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ qui vérifient

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) - 3\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = 0$$

On pose $\psi : (x,y) \mapsto \varphi(-x+y, 3x-2y)$.

1) On pose $u = -x+y$ et $v = 3x-2y$. Exprimer x et y en fonction de u et v.
2) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer $\dfrac{\partial \psi}{\partial x}(x,y)$ en fonction des dérivées partielles de φ.
3) Conclure en précisant le raisonnement utilisé.
On pourra utiliser le résultat de l'exercice 7.

12 ★☆ Calculer les dérivées partielles de $f(x,y) = e^{xy}$.

13 ★☆ On considère $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, et la spirale logarithmique $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ pour $t \in \mathbb{R}$. On pose $h = f \circ \gamma$.

1) Calculer $h'(t)$ à l'aide de la règle de la chaîne.
2) Retrouver le résultat en simplifiant d'abord l'expression de $h(t)$.

14 ★★ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On pose $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

1) Calculer $\partial_r F$ et $\partial_\theta F$ en fonction des dérivées partielles de f.
2) En déduire que, pour $r > 0$, on a

$$(\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2 = (\partial_r F)^2 + \frac{1}{r^2}(\partial_\theta F)^2$$

les dérivées partielles étant toutes évaluées au point $(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Extrema

15 ★☆ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = xe^y + ye^x$$

1) Montrer que f possède un unique point critique $(x_0, y_0) = (-1,-1)$.
2) On pose $g(h) = f((-1,1)+(h,-h))$. Par un développement limité en 0 de g, montrer que $(-1,-1)$ n'est pas un extremum de f.

16 ★★ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = x^2 - 3xy + 3y^2 + 1$$

1) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ puis établir qu'elle possède un unique point critique.
2) En écrivant $f(x,y)$ différemment, conclure qu'en ce point, la fonction f admet un minimum global.

17 ★★ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + x^3$$

Déterminer les extrema locaux de f et préciser pour chacun d'eux si c'est un maximum ou minimum, local ou global.